1、积分拟合

已知拟合公式： $y=\int_{t=1}^{x}\left(-p_1\cdot x^{(-p_2-1)}\cdot\exp\left((4.15-p_2)\cdot\frac{1-u^{p_3}}{p_3}\right)\right)dt$

数据：

x	1,0.93,0.84,0.81,0.80,0.74,0.73,0.71
y	0,15.15,43.94,63.63,65.15,103.02,101.51,113.63

代码：

```
Variable x,y;
Function y=int(-p1*x^(-p2-1)*exp((4.15-p2)*(1-u^p3)/p3),u=1:x);
Data;
x=[1,0.93,0.84,0.81,0.80,0.74,0.73,0.71];
y=[0,15.15,43.94,63.63,65.15,103.02,101.51,113.63];
```

结果：

均方差(RMSE): 2.02900252583067
残差平方和(SSE): 32.934809998618
相关系数(R): 0.998669137608532
相关系数之平方(R^2): 0.997340046411768
决定系数(DC): 0.997316794675174
F 统计(F-Statistic): 931.721466437414

```
参数                    最佳估算
-------------------- -------------
p1    -1420.44754390051
p2    7.03537386990971
p3    -711.566676987631
```

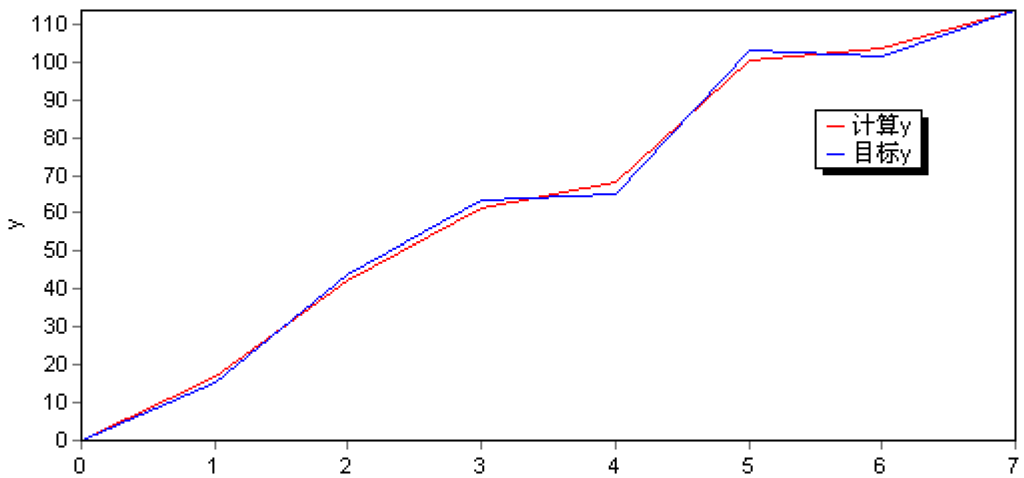

图 1. 拟合结果

2、隐函数拟合

已知拟合公式：

$$y = p_1 \cdot \left(1 - \frac{x}{p_2}\right)^{p_3} \cdot \left(1 - y \cdot \frac{\frac{x}{a \cdot y + b}}{p_4}\right) \cdot \frac{c - y \cdot \frac{x}{(a \cdot y + b) \cdot d}}{\left(c - y \cdot \frac{x}{(a \cdot y + b) \cdot d}\right) + p_5}$$

数据：

x	1,0.93,0.84,0.81,0.80,0.74,0.73,0.71
y	0,15.15,43.94,63.63,65.15,103.02,101.51,113.63

代码：

```
Constant a=3.5, b=0.005, c=3.5, d=2.25;
Variable x,y;
Function y=p1*(1-x/p2)^p3*(1-y*x/(a*y+b)/p4)*((c-y*x/((a*y+b)*d))/((c-y*x/((a*y+b)*d))+p5));
Data;
x=[16.8,11.9,8.9,8.4,4.13];
y=[0.02,0.05,0.07,0.1,0.12];
```

结果：

```
目标函数值(最小): 1.18946815951971E-13
均方差(RMSE): 3.21218575385506E-7
残差和(SSE): 5.15906865863468E-13
相关系数(R): 0.999999999960121
决定系数(DC): 0.999999999917849

参数 最佳估算
----------     -------------
p1     0.0504135348907995
p2     20.6113788649113
p3     0.753391972370033
p4     2.39278753437374
p5     -2.43911055983801
```

3、动态快捷模式

动态快捷模式可以快捷模式处理以前版本需在编程模式下才能完成的任务，支持动态数组。

3.1、水量分配问题

分配水资源量为 7 个单位，供给 3 个用户，各用户得到不同水量的经济效益如下表 3-22，求效益最高的水资源量分配方案。

经济效益表

用水单位 / 用户	0	1	2	3	4	5	6	7
A1	0	5	15	40	80	90	95	100
A2	0	5	15	40	60	70	73	75
A3	0	4	26	40	45	50	51	53

设 $B_{i,j}$代表第 i 个用户获得 j 个用水单位的效益，i=1..3，j=1..7；P_i代表第 i 个用户获得的用水单位，模型构成如下：

目标函数：max $\sum_{i=1}^{3} B_{i,P_i}$

用水单位总和约束：$\sum_{i=1}^{3} P_i = 7$

4.0 及以前的版本必须在编程模式方能求解该问题，如下两段代码分别为 Basic 和 Pascal 模式下的求解代码。

Basic 代码

```
Algorithm = SM2[3];
Constant B(1:3, 0:7)=[0,5,15,40,80,90,95,100,
                      0,5,15,40,60,70,73,75,
                      0,4,26,40,45,50,51,53];
IntParameter p(1:3)=[0,7];
Maximum;
StartProgram [Basic];
Sub MainModel
    ObjectiveResult = B(3,p(3)) + B(1,p(1)) +B(2,p(2))
    ConstrainedResult = p(3)+p(1)+p(2) = 7
End Sub
EndProgram;
```

Pascal 代码：

```
Algorithm = SM2[3];
Constant B(1:3, 0:7)=[0,5,15,40,80,90,95,100,
                      0,5,15,40,60,70,73,75,
                      0,4,26,40,45,50,51,53];
IntParameter p(1:3)=[0,7];
Maximum;
StartProgram [Pascal];
Procedure MainModel;
Begin
    ObjectiveResult := Benefit[3,p[3]] + Benefit[1,p[1]] +Benefit[2,p[2]];
    ConstrainedResult := p[3]+p[1]+p[2] = 7;
End;
EndProgram;
```

5.0 版始，可用下列快捷模式

```
Algorithm = SM2[30];
Constant Benefit(1:3, 0:7)=[0,5,15,40,80,90,95,100,
                            0,5,15,40,60,70,73,75,
```

```
                                    0,4,26,40,45,50,51,53];
IntParameter p(1:3)=[0,7];
MaxFunction Sum(i=1:3)(Benefit[i,p[i]]);
                  Sum(p)(p)=7;
```

运行结果均相同：

```
迭代数: 7
计算用时(时:分:秒:毫秒): 00:00:00:47
计算中止原因: 达到收敛判定标准
优化算法: 快速简面体爬山法 + 通用全局优化法
目标函数值(最大): 120
p1: 4
p2: 3
p3: 0
```

上面三段代码均可得到相同的结果。相比而言，快捷模式代码简洁、明了、易懂，不需 Basic 和 Pascal 语言基础。

3.2、旅行商（TSP）问题

TSP 问题是非常著名的组合优化问题：有 N 个城市，从某一城市出发，每个城市访问一次，最后回到起始城市，试求最短距离的访问路线。下面以某地 6 个城市为例

城市间距离表

	城市 1	城市 2	城市 3	城市 4	城市 5	城市 6
城市 1	0	702	454	842	2396	1196
城市 2	702	0	324	1093	2136	764
城市 3	454	324	0	1137	2180	798
城市 4	842	1093	1137	0	1616	1857
城市 5	2396	2136	2180	1616	0	2900
城市 6	1196	764	798	1857	2900	0

传统编程模式代码：

```
Constant n = 6;
Parameters Cities(0:n-1)[0, n-1];
Constant Distance(0:n-1, 0:n-1) = [0,      702,   454,   842,   2396, 1196,
                                   702,   0,      324,   1093, 2136, 764 ,
                                   454,   324,   0,      1137, 2180, 798 ,
                                   842,   1093, 1137, 0,      1616, 1857,
                                   2396, 2136, 2180, 1616, 0,      2900,
                                   1196, 764,   798,   1857, 2900, 0      ];
Exclusive = True;
Minimum = True;
StartProgram;
Var TemSum : Double;
     i : integer;
Begin
```

```
    TemSum := 0;
    for i := 0 to n-2 do
        TemSum := TemSum + Distance[Cities[i], Cities[i+1]];
    ObjectiveResult := TemSum + Distance[Cities[n-1], Cities[0]];
End;
EndProgram;
```

5.0 版开始可用下列快捷模式：

```
Constant n = 6;
Parameters Cities(0:n-1)[0, n-1];
Constant Distance(0:n-1, 0:n-1) = [0,     702,   454,   842,   2396, 1196,
                                   702,   0,     324,   1093, 2136, 764 ,
                                   454,   324,   0,     1137, 2180, 798 ,
                                   842,   1093, 1137, 0,     1616, 1857,
                                   2396, 2136, 2180, 1616, 0,     2900,
                                   1196, 764,   798,   1857, 2900, 0     ];
Exclusive = True;
MinFunction Sum(i=0:5)(Distance[Cities[i], Cities[Wrap0(i+1,n-1)]]);
```

均可得相同结果。

4、ODE 方程求解时复合型输出

已知微分方程：$\frac{dy^2}{dx^2} = 2 \cdot \cos(x) - x \cdot \sin(x-a)$

微分区间 x = [0,4]，a 为一变化系数，范围[-1,5]，变化步长 0.1，y 及 $\frac{dy}{dx}$ 初值均为 0，试画出以 y 为横坐标， $\frac{dy}{dx}$ 及 $\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dy^2}{dx^2}$ 为纵坐标的图。

注意 $\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dy^2}{dx^2}$ 为一复合型输出变量。5.0 版代码

```
LoopConstant a=[-1:0.1:5];
Variable x=[0,4], y=0, y'=0;
Plot y[x], y', y'*y";
ODEFunction y"=2*cos(x) - x*sin(x-a);
```

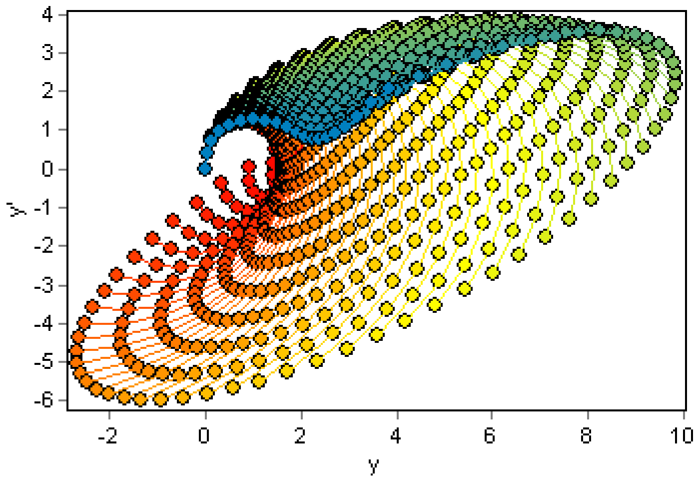

图 2. $\dfrac{dy}{dx}$ vs. y

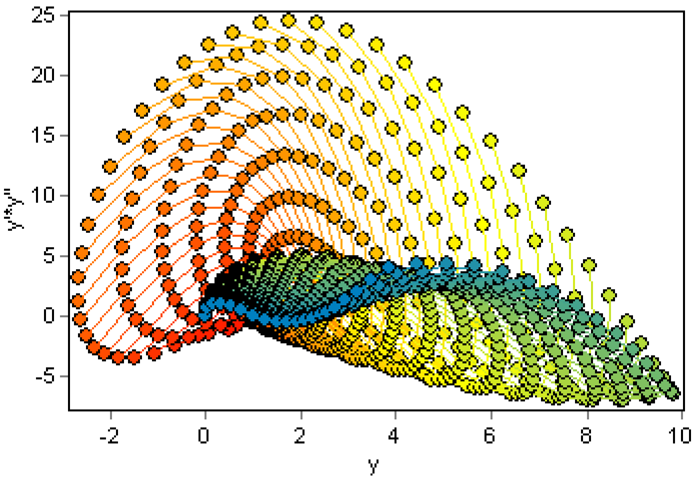

图 3. $\dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{dy^2}{dx^2}$ vs. y

5、微分方程复合型变量拟合

已知微分方程组：$\begin{cases}\dfrac{dx^3}{dt^3}=-a\cdot y\cdot\dfrac{dx^2}{dt^2}\\ \dfrac{dy^3}{dt^3}=-b\cdot x\cdot\dfrac{dy^2}{dt^2}\end{cases}$

a、b 是未知参数，初始值：t = 0 时 x = 0, y = 0;

数据如下表，注意复合型数据 $\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{dy^3}{dt^3}$。

t	$\frac{dx}{dt}+\frac{dy^3}{dt^3}$
0.4	1.263
0.8	1.433
1.2	1.867
1.6	2.691
2	3.605
2.4	4.253
2.8	4.575
3.2	4.703
3.6	4.751
4	4.769

代码：

```
Parameter a,b;
InitialODEValue t=0,x=0,y=0;
Variable t,x'+y''';
ODEFunction x'''=-a*y*x";
                    y'''=-b*x*y";
Data;
0.4    1.263
0.8    1.433
1.2    1.867
1.6    2.691
2      3.605
2.4    4.253
2.8    4.575
3.2    4.703
3.6    4.751
4      4.769
```

结果：

均方差(RMSE): 9.54321931839611E-5
残差平方和(SSE): 9.10730349590087E-8
相关系数(R): 0.999999997582378
相关系数之平方(R^2): 0.999999995164756
决定系数(DC): 0.999999995164755
F 统计(F-Statistic): 165451809.163734

```
参数                    最佳估算
-------------------- -------------
a      0.202539247435704
b      0.499608213676066
x'初值      1.00025810546829
x"初值      1.9988657672993
y'初值      0.969733072239974
y"初值      2.00111186237048
```

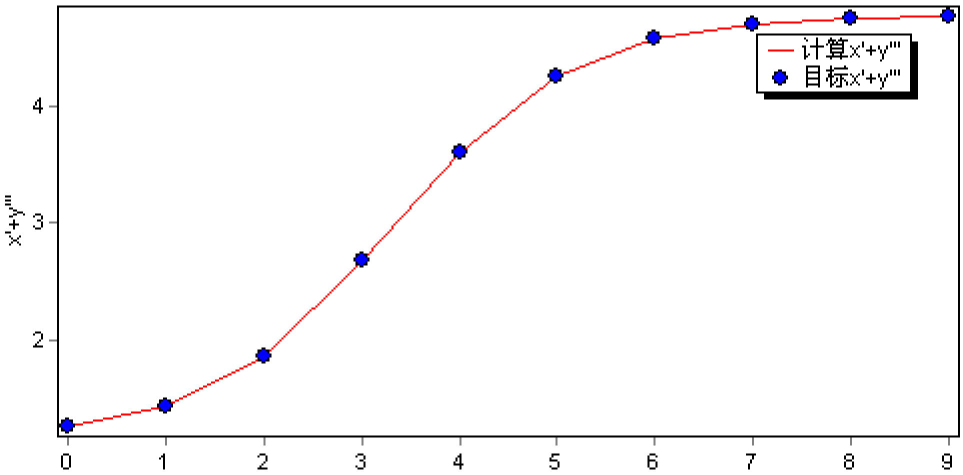

图 4. 微分拟合图

6、微分方程自由变量拟合

已知微分方程：$\frac{dy}{dx} = p_1 + p_2 \cdot p_3 \cdot \exp(p_3 \cdot x \cdot y + a) + a \cdot b$

三个未知参数：p1、p2 和 p3

数据如下表，a、b 为自由变量数据。

x	y	a	b
1	4540	1.1	1.2
2	4990	2.1	2.2
3	5350	3.1	3.2
4	5650	4.1	4.2
5	5900	5.1	5.2
6	6100	6.1	6.2
7	6260	7.1	7.2
8	6390	8.1	8.2
9	6500	9.1	9.2
10	6590	10.1	10.2

代码：

```
Variable x,y,a,b;
ODEFunction y'=p1+p2*p3*exp(p3*x*y+a)+a*b;
Data;
x=[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10];
y=[4540,4990,5350,5650,5900,6100,6260,6390,6500,6590];
a=[1.1,2.1,3.1,4.1,5.1,6.1,7.1,8.1,9.1,10.1];
b=[1.2,2.2,3.2,4.2,5.2,6.2,7.2,8.2,9.2,10.2];
```

结果：

均方差(RMSE): 2.93349051104509
残差平方和(SSE): 77.4482992055242
相关系数(R): 0.999984197570149
相关系数之平方(R^2): 0.999968395390015

决定系数(DC): 0.999967659804908
F 统计(F-Statistic): 92763.818879157

参数 最佳估算

-------------------- -------------

p1 711.237765263181
p2 634233.159694669
p3 -0.000128953173562387

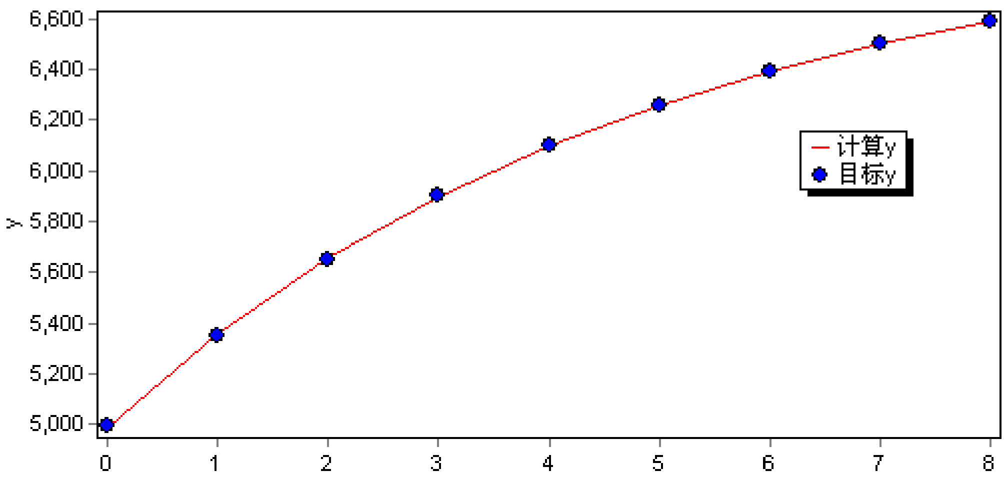

图 5. 自由变量微分拟合结果

7、过点约束拟合

已知微分方程：$\dfrac{dy}{dt} = -k_1 \cdot y^{k_2}$

两个未知参数：k1 和 k2

两组数据如下表，约束条件：计算的 y 值必须 1）通过第一组数据的最后一点，即 t=300, y=0.869；2）通过第二组数据的第 5 个点，即 t=120, y=3.383；3）满足前述两个条件下，整体拟合最好。

第一组数据		第二组数据	
t	y	T	y
0	10	0	20
30	6.600	30	12.157
60	4.745	60	7.568
90	3.672	90	5.360
120	2.382	**120**	**3.383**
150	2.030	150	2.768
180	1.543	180	1.997
210	1.357	210	1.778
240	1.143	240	1.525
270	0.972	270	1.182

300	**0.869**	300	1.156

代码：

```
Variable t,y;
SubjectTo y[1,300]-0.869=0,y[2,120]-3.383=0;
ODEFunction y'=-k1*y^k2;
Data;
0,30,60,90,120,150,180,210,240,270,300;
10,6.600,4.745,3.672,2.382,2.030,1.543,1.357,1.143,0.972,0.869;
Data;
0,30,60,90,120,150,180,210,240,270,300;
20,12.157,7.568,5.360,3.383,2.768,1.997,1.778,1.525,1.182,1.156;
```

结果：

```
参数                    最佳估算
-------------------- -------------
k1    0.00484269559587716
k2    1.54908515383013

微分方程拟合约束(SubjectTo):
y[1,300]-0.869-(0): -2.42179598650529E-8
y[2,120]-3.383-(0): -3.383

y[1,300]-0.869-(0): -0.869
y[2,120]-3.383-(0): 1.17812133453802E-8

====== 输出结果 =====

文件：数据文件 - 1
No    t     目标 y    计算 y
1     30    6.6    6.35680508847291
2     60    4.745 4.42389029610784
3     90    3.672 3.27012728741216
4     120   2.382 2.52367698963416
5     150   2.03   2.01157919553931
6     180   1.543 1.64421720994868
7     210   1.357 1.37125729259501
8     240   1.143 1.1625990723709
9     270   0.972 0.999314429741903
10    300   0.869 0.86899997578204

文件：数据文件 - 2
No
1     30    12.157      10.6522999909235
2     60    7.568 6.67660814344904
3     90    5.36   4.6050159245847
4     120   3.383 3.38300001178121
5     150   2.768 2.5989673589773
6     180   1.997 2.06442265192374
7     210   1.778 1.6828008966637
8     240   1.525 1.40033282900179
9     270   1.182 1.18508235273886
10    300   1.156 1.01707777644985
```

8、数据缺失拟合

已知微分方程组：$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{t \cdot y \cdot b}{1+z} \\ \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{t \cdot z + y \cdot \exp(y)}{2} - b \end{cases}$

B 是未知参数

数据如下表，“*”表示该数据未知。

t	y	z
0.25	*	0.614
0.5	1.283	*
0.75	*	0.511
1	2.469	*

代码：

```
ODEStep = 0.05;
InitialODEValue t=0, y=1;
Variable t,y,z;
ODEFunction y'=t*y/(1+z)*b;
            z'=(t*z+y*exp(y))/2-b;
Data;
0.25  NAN 0.614
0.5   1.283 NAN
0.75  NAN 0.511
1     2.469 NAN
```

结果：

```
均方差(RMSE): 4.94307586908518E-5
残差平方和(SSE): 9.77359961901289E-9

参数                  最佳估算
-------------------- -------------
b       3.00103490574158
z 初值       1.00060825298937
```

9、特殊边值问题

9.1、例 1

已知微分方程组：$\begin{cases} \dfrac{du^2}{dx^2}+\dfrac{du}{dx}\cdot\dfrac{1}{x}-\sinh(u)+p^2=0 \\ \dfrac{dp^2}{dx^2}+\dfrac{dp}{dx}\cdot\dfrac{1}{x}-(E-u)\cdot p=0 \end{cases}$

边界条件：$\begin{cases} x=\dfrac{a+b}{2}\text{时}\dfrac{du}{dx}=0 \\ x=\mathrm{a}\text{时}\dfrac{du}{dx}=c \\ x=b\text{时}\dfrac{du}{dx}=c \\ x=a\text{时}p=0 \\ x=b\text{时}p=0 \end{cases}$

其中 a=1,b=4, c=3.5；E 为待求参数

代码：

```
Constant a=1,b=4, c=3.5;
Variable x,u',p;
ODEFunction u''=-u'/x +sinh(u) - p^2;
                    p''=-p'/x + (E-u)*p;
Data;
1,c,0
(a+b)/2,0,NAN
b,c,0
```

结果（两组）：

第一组	第二组
均方差(RMSE): 2.52471175540511E-14 残差平方和(SSE): 2.54966777915231E-27 参数　　　　　　　最佳估算 -------------------- ------------- e　　-2.36279389108023 u 初值　　0.339660818731927 p'初值　　7.40112034682918	均方差(RMSE): 3.9318457211146E-14 残差平方和(SSE): 6.18376430985887E-27 参数　　　　　　　最佳估算 -------------------- ------------- e　　1.24538014035785 u 初值　　-0.0622519902377452 p'初值　　3.73036617765854

9.2、例 2

已知微分方程：$\dfrac{dy^3}{dx^3}=p\cdot\left(1-\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right)-\dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{dy^2}{dx^2}$

边界条件：$\begin{cases} y_{(x=5)} = y''_{(x=5)} + y'_{(x=10)} \\ y'_{(x=10)} = y_{(x=0.8)} \\ y_{(x=3)} + y'_{(x=8)} = 2 \\ y_{(x=0)} = k \cdot y_{(x=10)} \\ y_{(x=0)} + y'(x=0) \geq 9.5 \cdot k \end{cases}$

微分区间：x = [0,10]，k 为未知参数。

代码：

```
ODEStep = 1;
InitialODEValue x=0,y=p1,y'=p2;
Variable x,y,y';
SubjectTo y[5]=y''[5]+y'[10], y'[10]=y[0.8],y[3]+y'[8]=2,
                y[IniN]=k*y[10], y[IniN]+y'[IniN]>=9.5*k;
ODEFunction y'''=k*(1-y'^2)-y'*y'';
Data;
10,NAN,NAN
```

结果：

```
参数                    最佳估算
-------------------- -------------
k      0.123713492991967
p1     0.5477638202593
p2     0.758795957924772
y''初值      -0.662075891588898

微分方程拟合约束(SubjectTo):
y[5]-(y''[5]+y'[10]): 0
y'[10]-(y[0.8]): -1.11022302462516E-16
y[3]+y'[8]-(2): 0
y[初值]-(k*y[10]): 1.11022302462516E-16
y[初值]+y'[初值]-(9.5*k): 0.131281594760386
```

输出结果

x	目标y	计算y	目标y	计算y’	目标y’’	计算y’’
0.8	NAN	0.980723708	NAN	0.361709616	NAN	-0.37091167
1	NAN	1.045957588	NAN	0.292123001	NAN	-0.326062243
2	NAN	1.205160883	NAN	0.052864788	NAN	-0.164802327
3	NAN	1.19672138	NAN	-0.04921233	NAN	-0.041020963
4	NAN	1.147466503	NAN	-0.02857971	NAN	0.083187925
5	NAN	1.181022371	NAN	0.115365611	NAN	0.200298663
6	NAN	1.410139209	NAN	0.353140057	NAN	0.261228193
7	NAN	1.892701582	NAN	0.607222198	NAN	0.233454684
8	NAN	2.604508499	NAN	0.80327862	NAN	0.155818951
9	NAN	3.472834584	NAN	0.921397155	NAN	0.084251842
10	NAN	4.427680498	NAN	0.980723708	NAN	0.038712694

验证代码：

```
Constant k=0.123713492991967,p1=0.5477638202593,p2=0.758795957924772,k1=-0.662075891588898;
Variable x=[0,10],y=p1,y'=p2,y''=k1;
Plot y,y',y''[y2];
ODEFunction y'''=k*(1-y'^2)-y'*y'';
```

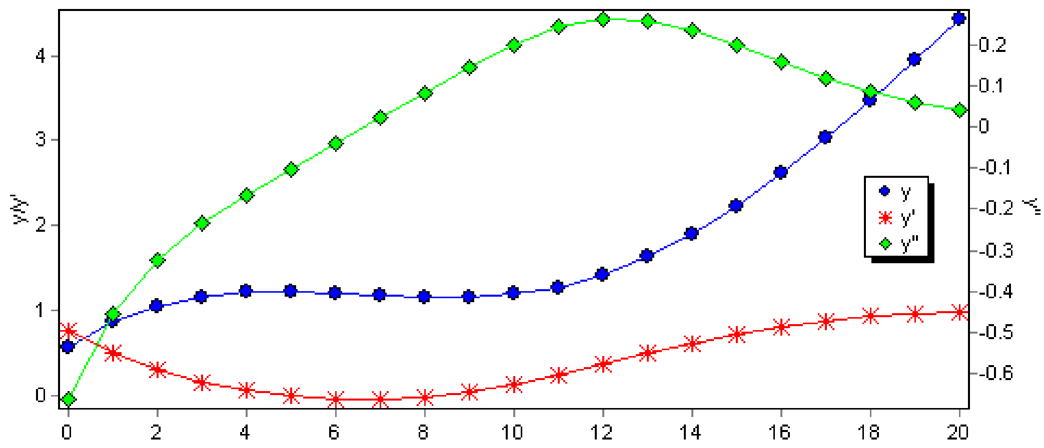

图 6. 验证图