

1. 高阶微分方程边值问题求解案例之一

1.1 问题描述

已知四阶常微分方程：

$$A \frac{d^4 y}{dx^4} + B \frac{d^2 y}{dx^2} = C \quad (1-1)$$

或写成：

$$Ay'''' + By'' = C, \quad x=[0, L] \quad (1-2)$$

边界及约束条件：

$$y(0)=0, y'(0)=0, y''(L)=0, Ay'''(L) + By'(L) = C$$

其中：A=0.5, B=1.5, C=3, L=3。

1.2 问题求解

这是一个典型的带约束条件的边值微分方程求解问题（BVP-Boundary Value Problem）。一般是用打靶法进行求解，Matlab 中有 BVP4C 等命令。下面用 1stOpt 求解，代码如下：

代码 1-1

```
ODEStep=0.1;
Constant a=0.5,b=1.5,c=3, L=3;
Variable x,y,y',y'';
SubjectTo a*y'''[1]+b*y'[1]=c;
ODEFunction y''''=(c-b*y'')/a;
Data;
0,0,0,NAN
L,NAN,NAN,0
```

注意上述代码中数据部分：

- 没有或缺失的数据用“NAN”表示；
- 1stOpt 不区分大小写；
- ODEStep 表示步长，可自行设定。

非常容易获得如下结果，二阶及三阶导数的初值为自动确定的两个求解参数。
约束条件 $Ay'''(L) + By'(L) = C$ 也完全满足： $0.5*y'''[3]+1.5*y'[3]-3:$

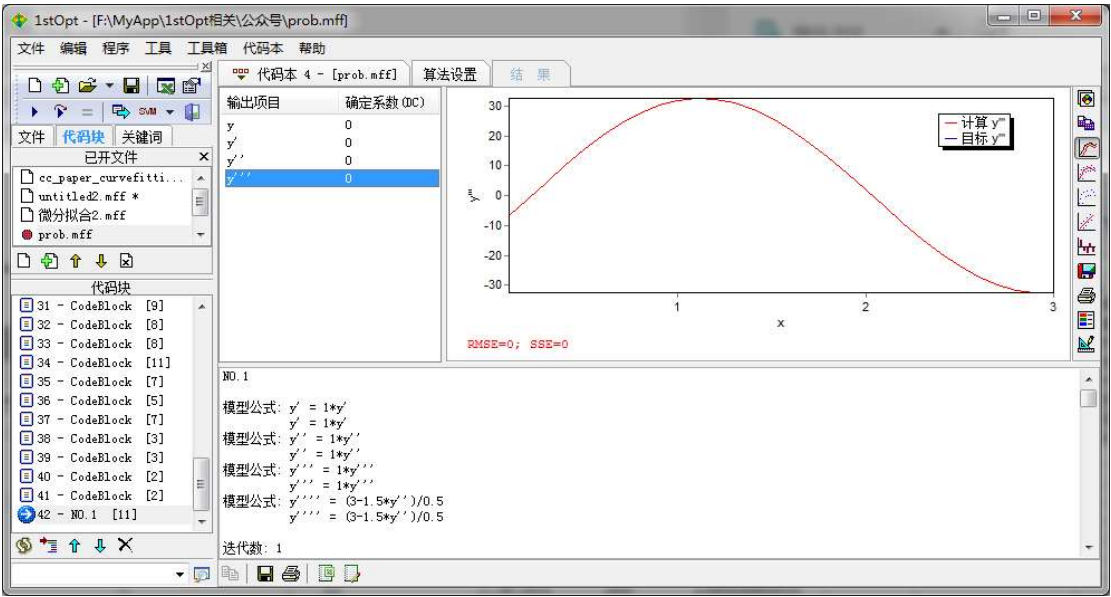


图 1-1 高阶微分方程拟合结果界面

参数名	参数值	算法	改进差分进化算法 (DE2)
y' 初值	-15.4864582346201	计算用时(时:分:秒:微秒)	00:00:04:734
y'' 初值	-12	均方差 (RMSE)	2.2291196666302E-16
传递参数:		残差平方和 (SSR)	1.98758979526301E-31
0.5*y'[3]+1.5*y[3]-3	0	相关系数 (R)	0
		修正 R 平方 (Adj. R^2)	-0.208333333333333
		确定系数 (DC)	0
		卡方系数 (Chi-Square)	-385.881973784213
		F 统计 (F-Statistic)	28

图 1-2 高阶微分方程拟合数值结果

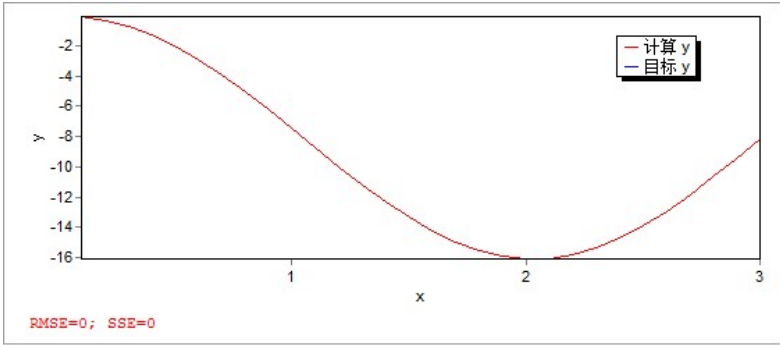


图 1-3 高阶微分方程 y 拟合结果

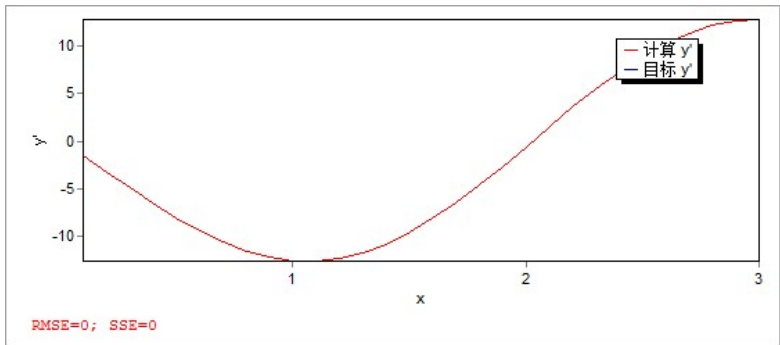


图 1-4 高阶微分方程 y' 拟合结果

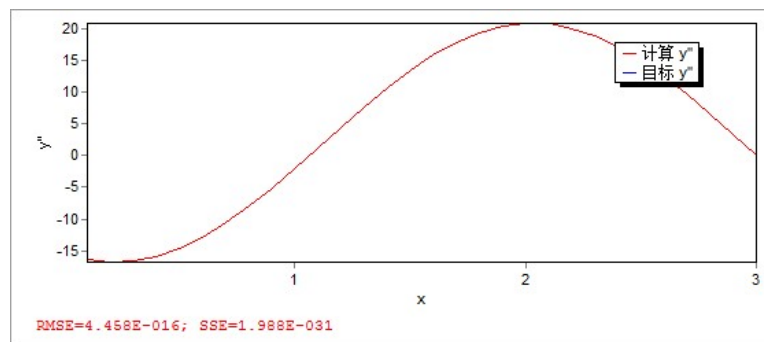


图 1-5 高阶微分方程 y'' 拟合结果

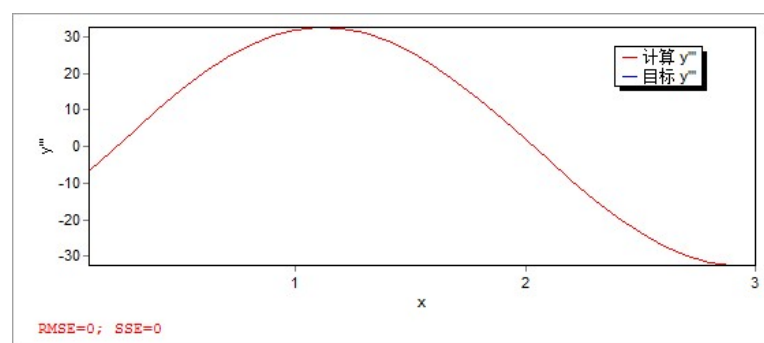


图 1-6 高阶微分方程 y''' 拟合结果

1.3 小结

对于高阶微分方程边值问题, 1stOpt 可以自动降阶求解, 不用人为手动降阶, 方便快捷, 同时也可以处理除边值外的其它类型的约束