

10. 1stOpt 全局最优化函数测试

函数测试题集（Benchmark）是检验优化求解器效果好坏的最佳方式，也是开发和验证优化算法的“验金石”。网站（http://infinity77.net/global_optimization/test_functions.html#test-functions-index）给出了 184 道函数优化测试题，并按获得全局最优解的成功概率由低到高进行排序给出。在此，选取难度最大的前 10 道题，用 1stOpt 进行计算，验证 1stOpt 全局最优化求解能力的优劣。

10.1 测试题集

难度最大的前 10 道题如下表，成功率由 0% 至 6.83%，维数除第一道为 5 维外均为 2 维。

Optimization Method	N	Overall Success (%)
DeVilliersGlasser02	5	0.00
Damavandi	2	0.25
CrossLegTable	2	0.83
XinSheYang03	2	1.08
SineEnvelope	2	2.17
Whitley	2	4.92
Zimmerman	2	4.92
Griewank	2	6.08
Trefethen	2	6.58
Bukin06	2	6.83

10.1.1 DeVilliersGlasser02 函数

$$f_{\text{DeVilliersGlasser01}}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{24} [x_1 x_2^{t_i} \tanh[x_3 t_i + \sin(x_4 t_i)] \cos(t_i e^{x_5}) - y_i]^2$$

其中： $t_i = 0.1(i - 1)$ ，

$$y_i = 53.81(1.27^{t_i}) \tanh(3.012t_i + \sin(2.13t_i)) \cos(e^{0.507} t_i).$$

$$n=5, \quad x_i \in [1, 60] \quad i = 1, \dots, n.$$

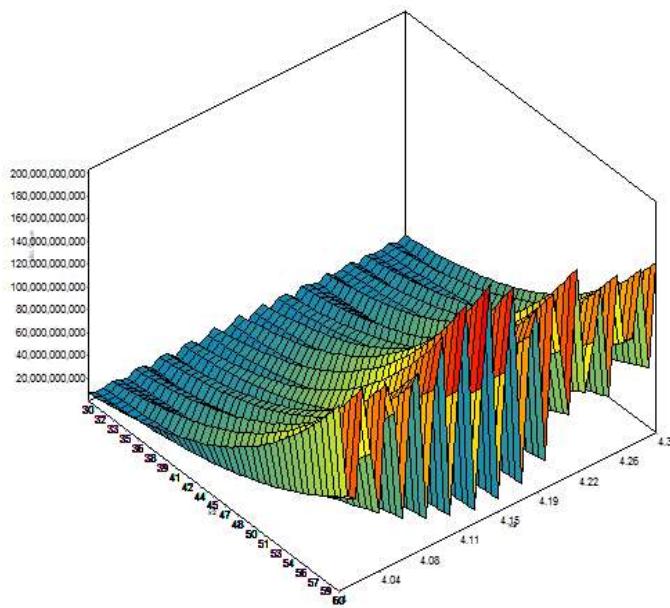


图 10-1. 三维 DeVilliersGlasser02 函数图

全局最优解: $f(x_i) = 0$, $x = [53.81, 1.27, 3.012, 2.13, 0.507]..$

10.1.2 Damavandi 函数

$$f_{\text{Damavandi}}(\mathbf{x}) = \left[1 - \left|\frac{\sin[\pi(x_1 - 2)] \sin[\pi(x_2 - 2)]}{\pi^2(x_1 - 2)(x_2 - 2)}\right|^5\right] [2 + (x_1 - 7)^2 + 2(x_2 - 7)^2]$$

其中 $n=2$, $x_i \in [0, 14]$ $i = 1, \dots, n$.

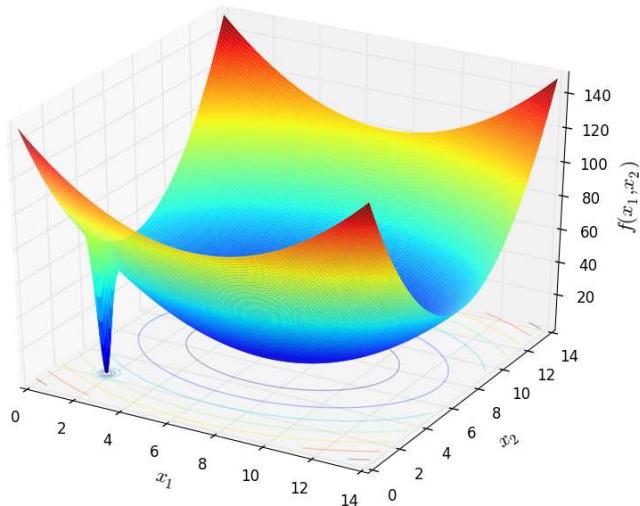


图 10-2. 三维 Damavandi 函数图

全局最优解: $f(x) = 0.0$, $x[i] = 2$ for $i=1,\dots,n$

10.1.3 CrossLegTable 函数

$$f_{\text{CrossLegTable}}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\left(\left| e^{\left| 100 - \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{\pi} \right|} \sin(x_1) \sin(x_2) \right| + 1 \right)^{0.1}}$$

其中 $n=2$, $x[i] = [-10, 10]$, $i=1,2$.

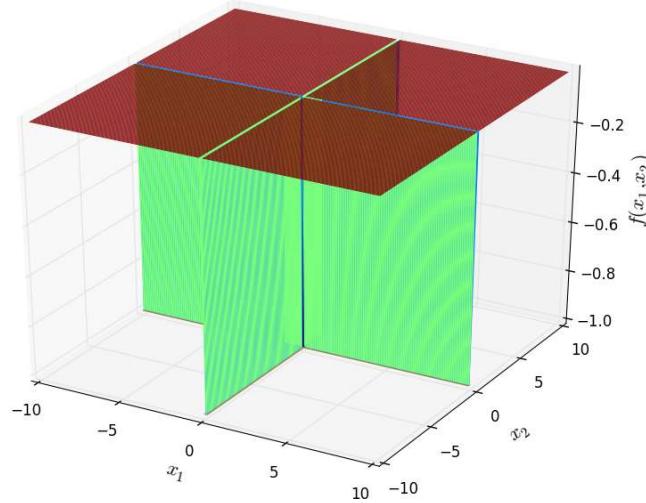


图 10-3. 三维 Cross-Leg-Table 函数图

全局最优解: $f(\mathbf{x}) = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$

10.1.4 XinSheYang03 函数

$$f_{\text{XinSheYang03}}(\mathbf{x}) = e^{-\sum_{i=1}^n (x_i/\beta)^{2m}} - 2e^{-\sum_{i=1}^n x_i^2} \prod_{i=1}^n \cos^2(x_i)$$

其中 $\text{beta} = 15$, $m = 3$, $n=4$, $x[i]=[-20,20]$, $i=1,\dots,n$

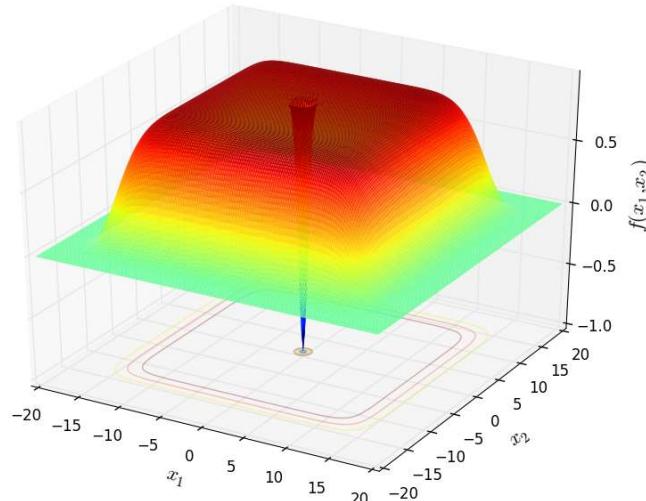


图 10-4. 三维 Xin-She Yang 3 函数图

全局最优解: $f(x) = -1$, $x[i] = 0$, $i=1,\dots,n$

10.1.5 SineEnvelope 函数

$$f_{\text{SineEnvelope}}(\mathbf{x}) = - \sum_{i=1}^{n-1} \left[\frac{\sin^2(\sqrt{x_{i+1}^2 + x_i^2} - 0.5)}{(0.001(x_{i+1}^2 + x_i^2) + 1)^2} + 0.5 \right]$$

其中, $n = 5$, $x[i] = [-100, 100]$, $i=1,\dots,n$.

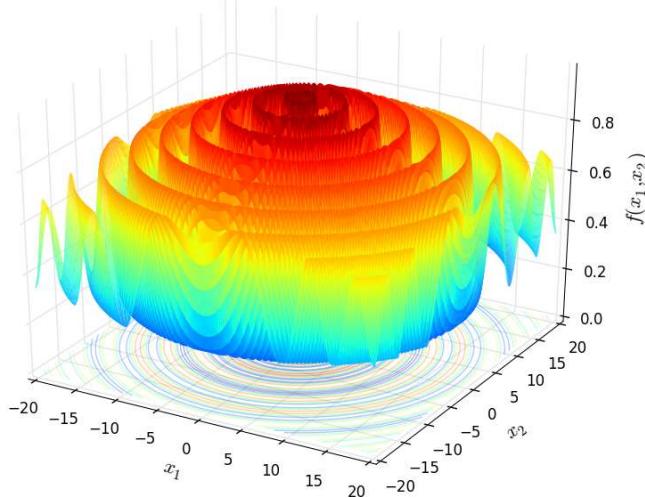


图 10-5. 三维 SineEnvelope 函数图

全局最优: $f(x) = 0$, $x[i] = 0$, $i=1,\dots,n$

10.1.6 Whitley 函数

$$f_{\text{Whitley}}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[\frac{(100(x_i^2 - x_j)^2 + (1 - x_j)^2)^2}{4000} - \cos(100(x_i^2 - x_j)^2 + (1 - x_j)^2) + 1 \right]$$

其中 $n = 2$, $x[i] = [-10.24, 10.24]$, $i=1,\dots,n$.

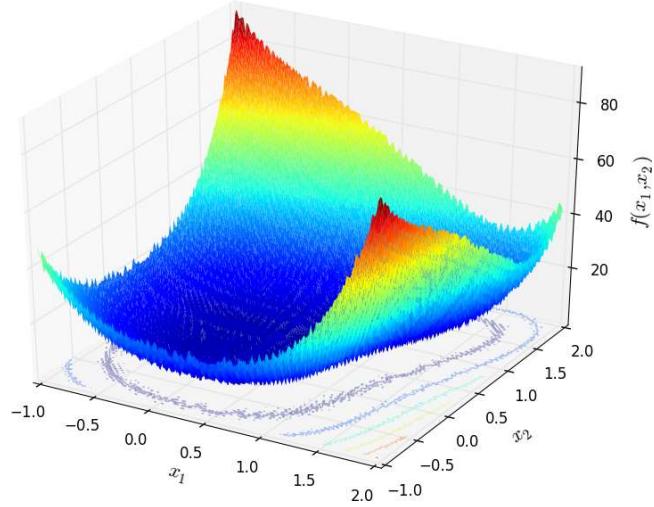


图 10-6. 三维 Whitley 函数图

全局最优解: $f(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x}[i] = 1, i=1,\dots,n$

10.1.7 Zimmerman 函数

$$f_{\text{Zimmerman}}(\mathbf{x}) = \max [Zh1(x), Zp(Zh2(x))\text{sgn}(Zh2(x)), Zp(Zh3(x))\text{sgn}(Zh3(x)), Zp(-x_1)\text{sgn}(x_1), Zp(-x_2)\text{sgn}(x_2)]$$

其中:

$$\begin{cases} Zh1(x) = 9 - x_1 - x_2 \\ Zh2(x) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 \\ Zh3(x) = x_1 x_2 - 14 \\ Zp(t) = 100(1 + t) \end{cases}$$

\mathbf{x} 是向量, t 是标量。 $n = 2, \quad \mathbf{x}[i] = [0, 100], i=1,2.$

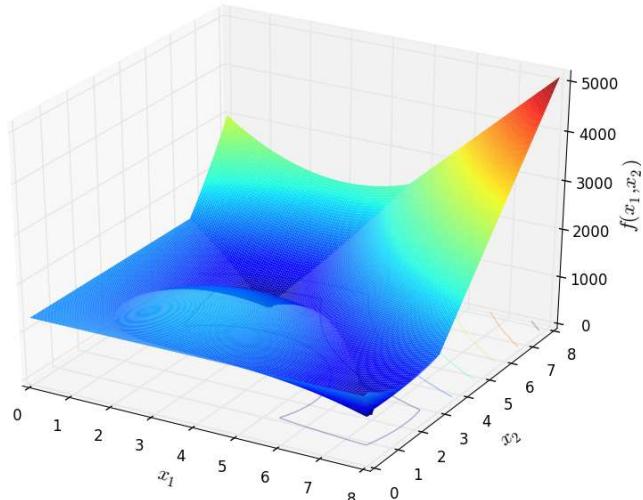


图 10-7. 三维 Zimmerman 函数图

全局最优解: $f(\mathbf{x}) = 0, \quad x1 = 7, x2 = 2$

10.1.8 Griewank 函数

$$f_{\text{Griewank}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4000} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \prod_{i=1}^n \cos\left(\frac{x_i}{\sqrt{i}}\right) + 1$$

其中 $n = 30$, $x[i] = [-600, 600]$, $i=1,\dots,n$.

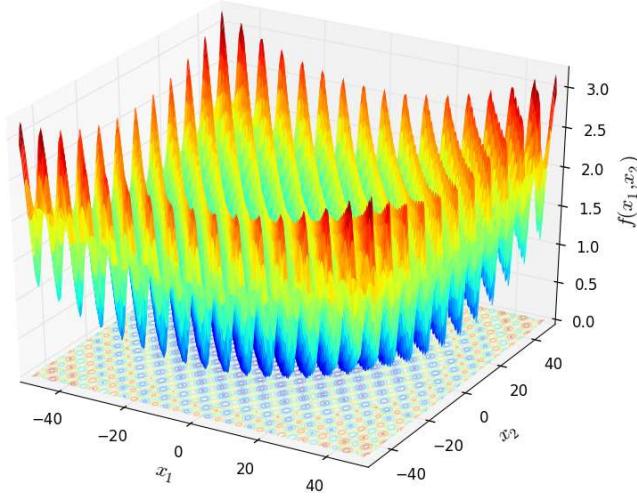


图 10-8. 三维 Griewank 函数图

全局最优解: $f(\mathbf{x}) = 0$, $x[i] = 0$, $i=1,\dots,n$

10.1.9 Trefethen 函数

$$f_{\text{Trefethen}}(\mathbf{x}) = 0.25x_1^2 + 0.25x_2^2 + e^{\sin(50x_1)} - \sin(10x_1 + 10x_2) + \sin(60e^{x_2}) + \sin[70 \sin(x_1)] + \sin[\sin(80x_2)]$$

其中 $n = 2$, $x[i] = [-10, 10]$, $i=1,2$.

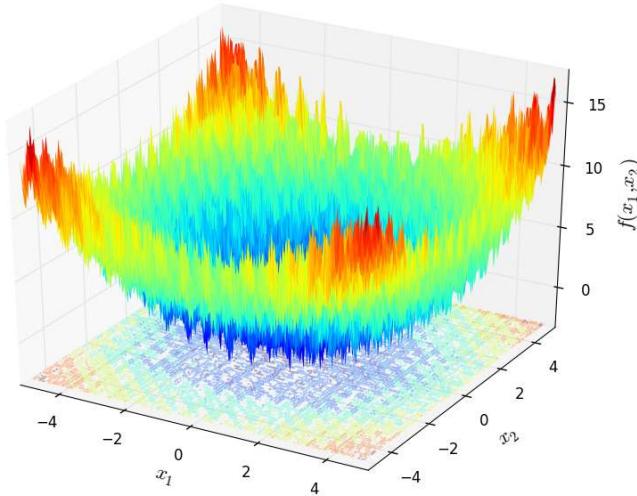


图 10-9. 三维 Trefethen 函数图

全局最优解: $f(x) = -3.3068686474$, $x[i] = [-0.02440307923, 0.2106124261]$

10.1.10 Bukin6 函数

$$f_{\text{Bukin6}}(\mathbf{x}) = 100\sqrt{|x_2 - 0.01x_1^2|} + 0.01|x_1 + 10|$$

其中 $n = 2$, $x1 = [-15, -5]$, $x2 = [-3, 3]$

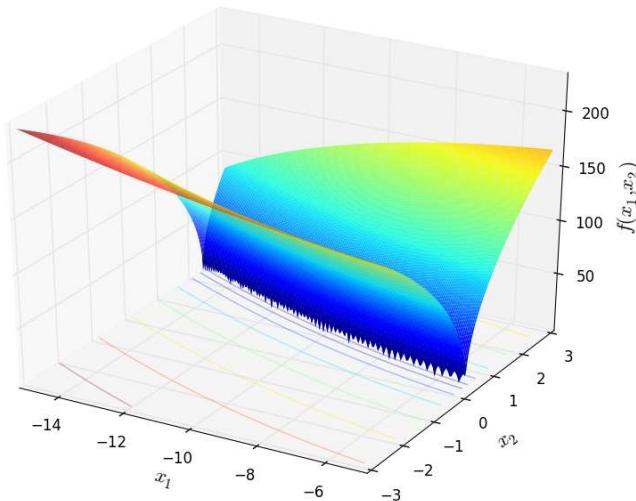


图 10-10. 三维 Bukin 6 函数图

全局最优解: $f(x) = 0$, $x1 = -10$, $x2 = 1$

10.2 1stOpt 求解代码及结果

1stOpt 中求解算法均采用缺省的全局通用优化算法 (UGO1 算法), 各函数分别独立计算 10 次。

10.2.1 DeVilliersGlasser02 函数

原问题给出的参数范围是[1,60], 而最优解为[53.81, 1.27, 3.012, 2.13, 0.507], 参数 $x5=0.507$ 明显不在参数范围内, 因此估计应该出现了笔误, 实际参数范围是[0,60]。

代码 10-1

```
ConstStr t=0.1*(i-1), y=53.81*(1.27^t)*tanh(3.012*t+sin(2.13*t))*cos(exp(0.507)*t);
Parameter x(5)=[0,60];
MinFunction Sum(i=1:24)((x1*x2^t*tanh(x3*t+sin(x4*t))*cos(t*exp(x5))-y)^2);
```

结果:

Objective Function (Min.): 1.46766530751063E-21

x1: 53.8099999999979

x2: 1.2699999999997

```
x3: 3.01200000000761
x4: 2.1299999999638
x5: 0.507000000000037
```

运行 10 次均可获得上述结果。

10.2.2 Damavandi 函数

代码 10-2

```
Parameter x(2)=[0,14];
MinFunction      (1-power(abs((sin(pi*(x1-2))*sin(pi*(x2-2)))/(pi^2*(x1-2)*(x2-2))),5))*(2+(x1-7)^2+2*(x2-7)^2);
```

结果：

```
Objective Function (Min.): -8.54871731197272E-14
x1: 1.9999999494684
x2: 1.9999999245698
```

运行 10 次均可获得上述结果。

10.2.3 CrossLegTable 函数

代码 10-3

```
ParameterDomain = [-10,10];
MinFunction -1/(abs(exp(abs(100-sqrt(x1^2+x2^2)/pi))*sin(x1)*sin(x2))+1)^0.1;
```

结果：

```
Objective Function (Min.): -1
x1: 0
x2: 0
```

运行 10 次均可获得上述结果。

10.2.4 XinSheYang03 函数

代码 10-4

```
Constant n=4,b=15,m=3;
ParameterDomain = [-20,20];
MinFunction exp(-Sum(i=1:n,x)((x/b)^(2*m)))-2*exp(-Sum(i=1:n,x)(x^2))*Prod(i=1:n,x)(sqr(cos(x)));
```

结果：

```
Objective Function (Min.): -1
x1: 0
x2: 0
x3: 0
x4: 0
```

运行 10 次均可获得上述结果。

10.2.5 SineEnvelope 函数

代码 10-5

```
Constant n=5;
Parameter x(n) = [-100,100];
```

```
MinFunction -Sum(i=1:n-1)(sqr(sin(sqrt(x[i+1]^2+x[i]^2)-0.5))/(0.001*(x[i+1]^2+x[i]^2)+1)^2+0.5);
```

结果:

```
Objective Function (Min.): -5.96598114355855
x1: 0
x2: 2.06668056678946
x3: 0
x4: 2.06668057108207
x5: 0
```

该问题原网址给出的结果: $f(x)=0$ for $x_i=0$ for $i=1,2,3\dots,n$ 是错误的, 且该函数是多解, 运行 10 次均可获得上述目标函数值 (因为多解对应的 x 值有所不同)。

10.2.6 Whitley 函数

代码 10-6

```
Constant n=2;
ParameterDomain = [-10.24,10.24];
MinFunction Sum(i=1:n)(Sum(j=1:n)((100*(x[i]^2-x[j])^2+(1-x[j])^2)^2/4000-cos(100*(x[i]^2-x[j])^2+(1-x[j])^2)+1));
```

结果:

```
Objective Function (Min.): 0
x1: 1
x2: 1
```

运行 10 次均可获得上述结果。

10.2.7 Zimmerman 函数

代码 10-7

```
ConstStr Zh1=9-x1-x2, Zh2=(x1-3)^2+(x2-2)^2, Zh3=x1*x2-14, Zp(t)=100*(1+t);
ConstStr f1=Zh1, f2=Zp(Zh2)*Sign(Zh2), f3=Zp(Zh3)*Sign(Zh3), f4=Zp(-x1)*Sign(x1), f5=Zp(-x2)*Sign(x2);
ParameterDomain = [0,100];
MinMax f(5);
```

结果:

```
MinMax: 229.020186025108
x1: 3.69990249857587
x2: 2.89461631593568
```

```
MinMax Function:
1: (((9-x1-x2))) = 2.40548118548845
2: (((100*(1+((x1-3)^2+(x2-2)^2)))*sign(((x1-3)^2+(x2-2)^2)))) = 229.020186025108
3: (((100*(1+((x1*x2-14))))*sign(((x1*x2-14))))) = 229.020186025108
4: (((100*(1+(-x1)))*sign(x1))) = -269.990249857587
5: (((100*(1+(-x2)))*sign(x2))) = -189.461631593568
```

运行 10 次均可获得上述结果。该结果与原网址给出的结果 ($f=0$ for $x=[7,2]$) 不同, 将 $x=[7,2]$ 代回原函数验证, 可得: $f1=0, f2=1700, f3=0, f4=-600, f5=-100$, 最

大值为 1700，此目标函数值远大于 1stOpt 计算结果 229.020186025108。因此初步估计原问题给的有误。

10.2.8 Griewank 函数

代码 10-8

```
Constant n=10;
parameter x(1:n)=[-600,600];
MinFunction sum(i=1:n)(x[i]^2/4000)-prod(i=1:n)(cos(x[i]/sqrt(i+1)))+1;
```

结果：

```
Objective Function (Min.): 0
x1: 0
x2: 0
x3: 0
x4: 0
x5: 0
x6: 0
x7: 0
x8: 0
x9: 0
x10: 0
```

运行 10 次均可获得上述结果。

10.2.9 Trefethen 函数

代码 10-9

```
ParameterDomain = [-10,10];
MinFunction 0.25*x1^2+0.25*x2^2+exp(sin(50*x1))-sin(10*x1+10*x2)+sin(60*exp(x2))+sin(70*sin(x1))+sin(sin(80*x2));
```

结果：

```
Objective Function (Min.): -3.30686864747524
x1: -0.0244030796504527
x2: 0.210612427144277
```

运行 10 次均可获得上述结果。

10.2.10 Bukin06 函数

代码 10-10

```
Parameter x1=[-15,-5], x2=[-3,3];
MinFunction 100*sqrt(abs(x2-0.01*x1^2))+0.01*abs(x1+10);
```

结果：

```
Objective Function (Min.): 7.0912165028858E-13
x1: -10.0000000000709
x2: 1.00000000001418
```

运行 10 次均可获得上述结果。

10.3 结论

原网址给出的 10 道难度最大的测试函数，全局最优解成功求解的概率从最高的 6.83% 到最低的 0%，而 1stOpt 则可以轻松且毫无压力地以 100% 的概率求解成功。不知道是原问题实际简单？或是 1stOpt 的全局优化计算能力过于强悍。