

40. 基于 1stOpt 的债券组合投资优化方案

40.1 引言

债券是以筹集资金为目的的一种有价证券，债券发行者按约定时间点向购买方支付一定比例的利息，并在到期时偿还本金。债券作为一种债权债务凭证，与其他有价证券一样，是一种虚拟资本，具有偿还性、流动性、安全性和收益性等特征。随着经济的发展，居民的多元化投资意识逐渐增强，除了股市，债券投资也得到市场的青睐和追捧。而如何依据债券的自身特性和投资环境去科学合理地选择合适的债券组合投资优化方案无疑有着重要的现实意义。

以某债券发行为例，分析债券投资的风险与收益，以实现债券组合投资利益最大化为目标，基于 1stOpt，建立债券最优投资规划数学模型，并根据模型计算结果提出科学合理的债券组合投资方案。

40.2 案例介绍

国家某部门计划发行一揽子债券系列，如表 40-1 示，共有 5 大类产品，15 个细分债券产品，债券到期年限有 2、3、4、5、9、12、15、18、20、25 年等 10 种，债券每年初发行，发行时间为 2025 年至 2053 年，债券每年末兑现，兑现有效截止时间为 2054 年。债券服务范围涵盖医药健康、交通运输、科技研发、装备制造、国民福利五大领域，债券到期后，允许债券购买者所在的地方政府收取税率不等的税收。债券类型、到期年限、收益率、税收比率等见表 40-1。

表 40-1 债券类别及属性

债券领域	风险等级 R	地方政府税率 (%) Ta	到期年限 Ey	到期税前总收益 (%) Tv	决策 变量
医药健康	5	0	2	4.45	x1
			9	39.89	x2
			20	232.11	x3
交通运输	2	20	3	8.00	x4
			12	58.27	x5
			25	300.54	x6
科技研发	4	0	4	12.55	x7
			15	180.09	x8
			20	232.11	x9
装备制造	3	10	4	12.55	x10
			9	39.89	x11
			18	206.12	x12
国民福利	1	30	2	4.45	x13
			5	18.77	x14

			18	206.12	x15
--	--	--	----	--------	-----

某集团准备投资 8000 万元资金购买该系列债券，经过调研考察及相应风险评估，其制定的投资要求为：①医药健康债券购买金额不得少于债券购买总金额的 20%，其余每个行业的债券购买总金额不得少于债券购买总金额的 10%；②所购债券的平均风险等级不得低于 2.5，等级数字越大风险越低；③要求所购买的债券的平均到期年限不超过 10 年；④投资回报底线为到期后至少保住 8000 万投资基金。

如果债券投资只允许在第一年初进行，那这些投资将分别在第 2、3、4、5、9、12、15、18、20 和 25 年收回本金和收益，8000 万元资金如何投资分配，使得 15 个细分债券产品的总收益达到最大。

40.3 模型的建立与求解

建立规划数学模型时，先依据 15 个细分债券产品确定决策变量，再确定目标函数和约束条件。

40.3.1 决策变量定义

为方便描述和分析，将三类医药健康债券的投资金额用分别用 x_1 、 x_2 、 x_3 表示，三类交通运输债券的投资金额用 x_4 、 x_5 、 x_6 表示，三类科技研发债券的投资金额用 x_7 、 x_8 、 x_9 表示，三类装备制造债券的投资金额用 x_{10} 、 x_{11} 、 x_{12} 表示，三类国民福利债券的投资金额用 x_{13} 、 x_{14} 、 x_{15} 表示，所有变量范围均在在 0 至 8000 之间并为实数。

40.3.2 模型构建

模型中，目标函数是债券投资总收益最大。根据题意，各个细分债券产品有着不同的风险等级和地方政府税率。交通运输领域、装备制造领域和国民福利领域的地方政府税率分别为 20%、10%和 30%，而医药健康领域和科技研发领域的地方政府税率为 0%，由此可看出不同的债券领域有着不同的实际收益，依据题目实际情况，列出目标函数及约束条件如下：

目标函数：

$$Max. \sum_{i=1}^{15} (x_i \cdot TV_i \cdot (1 - Ta_i))$$

其中， x ：决策变量； TV ：到期税前总收益 (%)； Ta ：地方政府税率 (%)

约束条件：

- 1) 总资金约束，用于债券投资的资金总额为 $TT=8000$ 万

$$\sum_{i=1}^{15} (x_i) \leq TT$$

- 2) 各分行业债券购买金额约束，中医药健康债券购买金额不得少于债券购买总金额的 20%，其余每个行业的债券购买总金额不得少于债券购买总金额的 10%，即：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geq 0.2 \cdot TT \\ x_4 + x_5 + x_6 \geq 0.1 \cdot TT \\ x_7 + x_8 + x_9 \geq 0.1 \cdot TT \\ x_{10} + x_{11} + x_{12} \geq 0.1 \cdot TT \\ x_{13} + x_{14} + x_{15} \geq 0.1 \cdot TT \end{cases}$$

- 3) 风险等级约束, 所购债券的平均风险等级不得低于 2.5, 等级数字越大, 风险越低。此约束条件为:

$$\sum_{i=1}^{15} (R_i \cdot x_i) \geq 2.5 \cdot \sum_{i=1}^{15} (x_i)$$

其中: R 为各投资债券风险等级 (参见表 40-1)

- 4) 平均年限约束, 所购买的债券的平均到期年限不能超过 10 年

$$\sum_{i=1}^{15} (E y_i \cdot x_i) \leq 10 \cdot \sum_{i=1}^{15} (x_i)$$

其中: E 为各投资债券到期年限 (参见表 40-1)

- 5) 非负及上限条件约束, 决策变量范围为 [0, 8000], 即:
 $8000 \geq x_i \geq 0, i=1,2,3...15$

40.3.3 1stOpt 求解

基于前述分析, 该模型为典型的线性规划模型, 代码如下

模型介绍代码:

```

Constant n=15;
Constant TT=8000;
Constant R=[5,5,5,2,2,2,4,4,4,3,3,3,1,1,1], Ta=[0,0,0,20,20,20,0,0,0,10,10,10,30,30,30]/100,
          Ey=[2,9,20,3,12,25,4,15,20,4,9,18,2,5,18],
          Tv=[4.45,39.89,232.11,8.0,58.27,300.54,12.55,180.09,232.11,12.55,39.89,206.12,4.45,18.77,206.12]/100;
Algorithm = LP;
Parameter x(n)=[0,8000];
MaxFunction Sum(i=1:n)(x[i]*Tv[i]*(1-Ta[i]));
Sum(i=1:n)(x[i])<=TT;
Sum(i=1:3)(x[i])>=0.2*TT;
For(j=1:4)(Sum(i=4+(j-1)*3:6+(j-1)*3)(x[i])>=0.1*TT);
Sum(i=1:n)(R[i]*x[i])>=2.5*Sum(i=1:n)(x[i]);
Sum(i=1:n)(Ey[i]*x[i])<=10*Sum(i=1:n)(x[i]);

```

结果:

Objective Function(Max.): 8655.4666666667

Best Estimated Parameters:

x1: 1066.6666666667
x2: 0
x3: 533.333333333333
x4: 800
x5: 0
x6: 0
x7: 0
x8: 4000
x9: 0
x10: 800
x11: 0
x12: 0
x13: 800
x14: 0
x15: 0

如果要求决策变量必须为整数（单位万元），只需见上述代码中的“Parameter x(n)=[0,8000];”改为“IntParameter x(n)=[0,8000];”即可，结果与实数情景略有不同，具体见下表 40-2.

表 40-2 模型计算结果

决策变量（各债券投资额，万元）	实数（万元）	整数（万元）
x1	1066.66666666667	1069
x2	0	0
x3	533.333333333333	531
x4	800	800
x5	0	0
x6	0	0
x7	0	0
x8	4000	4000
x9	0	0
x10	800	797
x11	0	0
x12	0	3
x13	800	800
x14	0	0
x15	0	0
目标函数值（总收益，万元）	8655.46666666667	8655.38099

计算完成后还可进行参数灵敏度分析，见下图，最重要的影响因子（投资债券产品）是 x8，即 15 年到期的科技研发债券；其次为 x3，20 年到期的医药健康债券。这两类债券需要投资者特别关注。

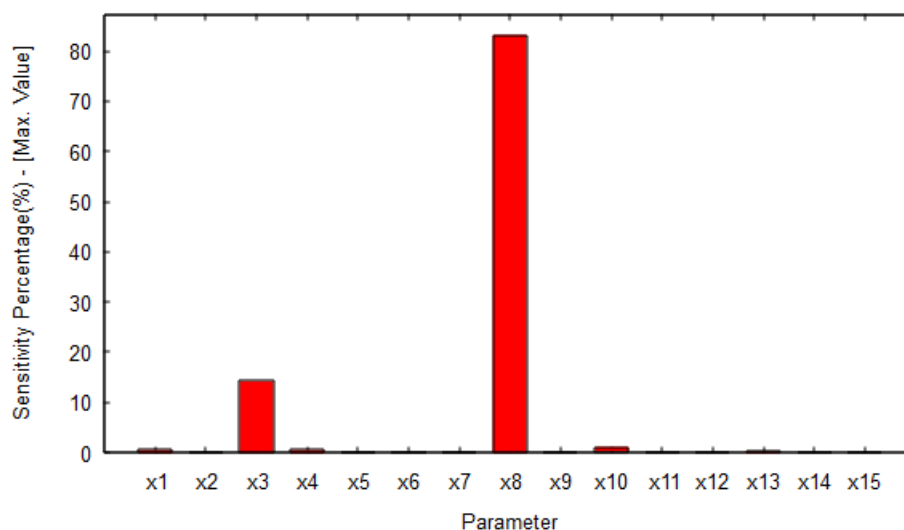


图 40-1. 投资债券灵敏度分析

40.4 小结

本案例中的债券组合投资优化实际上是一线性规划问题，1stOpt 软件平台可以轻松建立相关模型，求解代码直观易于理解，计算结果不仅能给出最优投资组合，基于参数灵敏度分析还可给出需重点关注的债券产品，确保投资者在安全的前提下利益最大化。