8. “降维”、“降阶”与“去除法” – 1stOpt 非线性方程组求解三“秘籍”

非线性方程组的求解可以说是最常见的科学计算问题之一，也是 1stOpt 软件最擅长和拿手的领域，基于其独特的 UGO 全局优化算法，绝大多数情况下 1stOpt 都可以在不需要猜初值的前提下获得最优结果，但即使如此，有些情况下也无法轻易求出正解，而此时如果能采用一些方法或技巧，不仅可以缩短求解计算时间，还可以增加得到正解的概率，起到事倍功半的作用。

本文要介绍的三种方法既是：“降维”、“降阶”与“去除法”。

8.1 降维

“降维”既是指通过中间变量的替换，将求解维数降低，如下简单示例：

有二元（维）非线性方程组：

$$\begin{cases} x_1 - x_2^2 = 10 \\ x_1 \cdot x_2 - x_1^{x_2} = -5 \end{cases}$$

该非线性方程组有两个未知数 x1 和 x2，其求解代码如下：

代码 8-1	结果
Function x1-x2^2=10; x1*x2-x1^x2=-5;	函数表达式 1: x1-x2^2-(10) = 0 2: x1*x2-x1^x2-(-5) = 0 目标函数值(最小): 0 x1: 10.2077969310351 x2: -0.455847486595133

降维处理：将 x1 视为一个中间变量，进行替换，将二元方程降维成一元方程。

第一个方程可写成：$x_1 = 10 + x_2^2$，再将 x1 代入第二个方程，即变成了只有一个未知数 x2 的一元方程，求解代码如下，注意“PassParameter”的使用，目的是将 x1 的值输出。

代码 8-2	结果
ConstStr x1=10+x2^2; PassParameter x1;	函数表达式 ((10+x2^2))*x2-((10+x2^2))^x2-(-5) = 0

Function x1*x2-x1^x2=-5;	目标函数值(最小): 0 x2: -0.455847486595132 传递参数(PassParameter): x1: 10.2077969310351

上述两者方式所得结果一样。一般而言计算时间与维数是成指数增加关系，“降维”会显著降低计算时间，同时加大获得最优解的可能性，这种现象在维数高时更加明显。

如下 6 元非线性方程组，共有 6 个未知数 x1 至 x6，其中要求 x1 的范围在[200,300]：

$$\begin{cases} \left(1-\frac{x_2}{500}\right)^{-2}\ln\left(\frac{x_2(x_3-306)}{x_2(x_3-303)-1500}\right)+\frac{\left(\frac{1}{x_2}-\frac{1}{500}\right)^{-1}\left(\frac{1}{x_2}-\frac{x_3-303}{x_2(x_3-303)-1500}\right)}{x_5}=0 \\ -\left(\frac{1}{400}-\frac{1}{x_2}\right)^{-1}\left(-\frac{x_2}{x_2(295.5-x_4)+1000}+\frac{1}{293-x_4}\right)+\frac{x_2(x_3-x_1)-1500}{(x_1-x_4)^2}+x_5x_2\left(\frac{1}{x_2x_4-1000}-\frac{1}{x_2(x_4+x_3-x_1)-1500}\right)+x_6 10=0 \\ \left(\frac{1}{x_2}-\frac{1}{500}\right)^{-1}\left(\frac{1}{x_3-306}-\frac{x_2}{x_2(x_3-303)-1500}\right)+\frac{x_2}{x_1-x_4}-x_5\left(\frac{x_2}{x_2(x_4+x_3-x_1)-1500}-\frac{1}{x_3}\right)+x_6x_2=0 \\ \frac{x_2(x_4-x_3)+1500}{(x_1-x_4)^2}+x_5\left(-\frac{1}{x_1}+\frac{x_2}{x_2(x_3+x_4-x_1)-1500}\right)-x_6(x_2+10)=0 \\ x_2(x_3-x_1)-900-10(x_1-x_4)=0 \\ \frac{x_2x_4-1000}{x_1}-\frac{x_2(x_4+x_3-x_1)-1500}{x_3}=0 \end{cases}$$

正常求解代码 8-3

```
Parameters x1=[200,300], x(2:6);
Function    (1-x2/500)^(-2)*ln((x2*(x3-306))/(x2*(x3-303)-1500))+(1/x2-1/500)^(-1)*(1/x2-(x3-303)/(x2*(x3-303)-1500))/x5=0;
-(1/400-1/x2)^(-1)*(-x2/(x2*(295.5-x4)+1000)+1/(293-x4))+(x2*(x3-x1)-1500)/(x1-x4)^2+x5*x2*(1/(x2*x4-1000)-1/(x2*(x4+x3-x1)-1500))+x6*10=0;
(1/x2-1/500)^(-1)*(1/(x3-306)-x2/(x2*(x3-303)-1500))+x2/(x1-x4)-x5*(x2/(x2*(x4+x3-x1)-1500)-1/x3)+x6*x2=0;
(x2*(x4-x3)+1500)/(x1-x4)^2+x5*(-1/x1+x2/(x2*(x3+x4-x1)-1500))-x6*(x2+10)=0;
x2*(x3-x1)-900-10*(x1-x4)=0;
(x2*x4-1000)/x1-(x2*(x4+x3-x1)-1500)/x3=0;
```

降维处理：

将第 5 个公式变形：

x2=(900+10*(x1-x4))/(x3-x1)

第 4 个公式变形为：

x6=((x2*(x4-x3)+1500)/(x1-x4)^2+x5*(-1/x1+x2/(x2*(x3+x4-x1)-1500)))/(x2+10);

由此将 x2 和 x6 作为中间替换变量，将 6 元原问题降维变为 4 元现问题。

降维后求解代码 8-4

```
Parameters x1=[200,300],x3,x4,x5;
ConstStr x2=(900+10*(x1-x4))/(x3-x1),
         x6=((x2*(x4-x3)+1500)/(x1-x4)^2+x5*(-1/x1+x2/(x2*(x3+x4-x1)-1500)))/(x2+10);
PassParameter x2,x6;
```

```
Function    (1-x2/500)^(-2)*ln((x2*(x3-306))/(x2*(x3-303)-1500))+(1/x2-1/500)^(-1)*(1/x2-(x3-303)/(x2*(x3-303)-1500))/x5=0;
-(1/400-1/x2)^(-1)*(-x2/(x2*(295.5-x4)+1000)+1/(293-x4))+(x2*(x3-x1)-1500)/(x1-x4)^2+x5*x2*(1/(x2*x4-1000)-1/(x2*(x4+x3-x1)-1500))+x6*10=0;
(1/x2-1/500)^(-1)*(1/(x3-306)-x2/(x2*(x3-303)-1500))+x2/(x1-x4)-x5*(x2/(x2*(x4+x3-x1)-1500)-1/x3)+x6*x2=0;
(x2*x4-1000)/x1-(x2*(x4+x3-x1)-1500)/x3=0;
```

计算结果：

降维前计算结果	目标函数值(最小): 3.51564191362788E-9 x1: 200.000612864707 x2: 0.00142126222085054 x3: 300.013712639426 x4: 289.986398380621 x5: 0.0827812502090571 x6: 0.0184778125243997
降维后计算结果	目标函数值(最小): 5.67956639681067E-25 x1: 201.130771531649 x3: 207.739088076793 x4: 139.26306395791 x5: 0.982572713192618 传递参数(PassParameter): x2: 229.813003866066 x6: -0.0155008306204169

降维前的第一段代码求解时间长、精度差、不易得到稳定最优解，而降维后非常容易得到稳定唯一最优解，同时计算时间也大幅减少。

8.2 降阶

“降阶”既是尽可能将高阶指数方程通过等效变换变为低阶方程。

已知非线性方程组如下：

$$\begin{cases}(x^2+y^2+z^2)^4-564080065.628\cdot(x^2+y^2+4\cdot z^2)=0\\((x+2)^2+y^2+z^2)^4-609249680.389\cdot((x+2)^2+y^2+4\cdot z^2)=0\\((x+2)^2+(y+2)^2+z^2)^4-649348646.964\cdot((x+2)^2+(y+2)^2+4\cdot z^2)=0\end{cases}$$

上述方程经过简单的变换可等效写成：

$$\begin{cases}(x^2+y^2+z^2)=\left(564080065.628\cdot(x^2+y^2+4\cdot z^2)\right)^{\frac{1}{4}}\\((x+2)^2+y^2+z^2)=\left(609249680.389\cdot((x+2)^2+y^2+4\cdot z^2)\right)^{\frac{1}{4}}\\((x+2)^2+(y+2)^2+z^2)=\left(649348646.964\cdot((x+2)^2+(y+2)^2+4\cdot z^2)\right)^{\frac{1}{4}}\end{cases}$$

原方程求解代码 8-5

```
Function
(X^2+Y^2+Z^2)^4-564080065.628*(X^2+Y^2+4*Z^2)=0;
```

```
((X+2)^2+Y^2+Z^2)^4-609249680.389*((X+2)^2+Y^2+4*Z^2)=0;
((X+2)^2+(Y+2)^2+Z^2)^4-649348646.964*((X+2)^2+(Y+2)^2+4*Z^2)=0;
```

降阶变换后求解代码 8-6

```
Function
(X^2+Y^2+Z^2)=(564080065.628*(X^2+Y^2+4*Z^2))^(1/4);
((X+2)^2+Y^2+Z^2)=(609249680.389*((X+2)^2+Y^2+4*Z^2))^(1/4);
((X+2)^2+(Y+2)^2+Z^2)=(649348646.964*((X+2)^2+(Y+2)^2+4*Z^2))^(1/4);
```

计算结果

降阶前	目标函数值(最小): 3.76395614062853E18 x: -1.26915727404337 y: -0.818925641993179 z: 2.17319436640797E-9 或： 目标函数值(最小): 2.38418579101563E-7 x: 5.75080009270492 y: 4.69777549048743 z: 35.2472711468273
降阶后	目标函数值(最小): 0 x: 5.75080009270499 y: 4.69777549048742 z: -35.2472711468272

降阶后计算结果明显优于降阶前，且更稳定。

8.3 去除法

“去除法”既是通过等效的乘法变换，尽可能将方程式中有除法的分母去除，其优点是防止漏失可能出现分母为 0 的根，另外除法极易导致计算的不稳定从而影响方程组正解的获得。

已知方程组如下，要求 x1，x4 和 x6 大于 0：

$$\begin{cases}\dfrac{x_1}{x_2\cdot x_3+0.0001}=10^{4.9}\\ \dfrac{x_4}{x_5\cdot x_3+0.0002}=10^{7.2}\\ \dfrac{x_6}{x_4\cdot x_3+0.0003}=10^{5.9}\\ x_1+x_3+x_4+2\cdot x_1\cdot x_6=1\\ x_1+x_2=2\\ x_5+x_4+x_6=3\end{cases}$$

去除法变换后方程组：

$$\begin{cases} x_1 = 10^{4.9} \cdot (x_2 \cdot x_3 + 0.0001) \\ x_4 = 10^{7.2} \cdot (x_5 \cdot x_3 + 0.0002) \\ x_6 = 10^{5.9} \cdot (x_4 \cdot x_3 + 0.0003) \\ x_1 + x_3 + x_4 + 2 \cdot x_1 \cdot x_6 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \\ x_5 + x_4 + x_6 = 3 \end{cases}$$

原方程求解代码 8-7

```
Function x1/(x2*x3+0.0001)=10^4.9;
         x4/(x5*x3+0.0002)=10^7.2;
         x6/(x4*x3+0.0003)=10^5.9;
         x1+x3+x4+2*x1*x6=1;
         x1+x2=2;
         x5+x4+x6=3;
```

去除法后代码 8-8

```
Function x1=10^4.9*(x2*x3+0.0001);
         x4=10^7.2*(x5*x3+0.0002);
         x6=10^5.9*(x4*x3+0.0003);
         x1+x3+x4+2*x1*x6=1;
         x1+x2=2;
         x5+x4+x6=3;
```

去除法后还可以考虑再降维，令：

$$\begin{cases} x_1 = 2 - x_2 \\ x_6 = 3 - x_5 - x_4 \\ x_3 = 1 - x_1 - x_4 - 2 \cdot x_1 \cdot x_6 \end{cases}$$

去除法后再降维代码 8-9

```
ConstStr x1=2-x2,
         x6=3-x5-x4,
         x3=1-x1-x4-2*x1*x6;
PassParameter x1,x3,x6;
Parameter x4>0;
Function x1=10^4.9*(x2*x3+0.0001);
         x4=10^7.2*(x5*x3+0.0002);
         x6=10^5.9*(x4*x3+0.0003);
```

计算结果：

去除法前	目标函数值(最小): 258.429259824601 x1: 5.38930904502507E-7 x4: 9.83414367131667 x6: 2.81453056239622E-6 x2: 3.27804770674877 x3: -3.05059603035624E-5

	x5: 6.53575581618691
去除法后	目标函数值(最小): 2.43355180202813E-26 x1: 1.99999424478625 x4: 2.27867038280215E-5 x6: 2.99996182868886 x2: 5.75558028682915E-6 x3: -12.9998298154547 x5: 1.53848166784836E-5
去除法再加降维	目标函数值(最小): 2.43353229191341E-26 x4: 2.27867038340989E-5 x2: 5.75558028871405E-6 x5: 1.53848166825731E-5 传递参数(PassParameter): x1: 1.99999424441971 x3: -12.9998298119991 x6: 2.99996182847948

“去除法”前的原方程很难得到稳定唯一最优解，“去除法”后则很容易，“去除法”再加降维后更易得到最优解，且用时更少，不仅效率高，效果也最好。

8.4 结语

在求解非线性方程组时，“降维”、“降阶”与“去除法”在方程组本身条件允许的前提下尽量优先考虑采用，不仅可以明显提高求解精度，同时也大幅缩短计算时间。